Méth. Mat. Phys. - Chapitre 5

Probabilités et statistiques

EPFL

- **Probabilité :** événement particulier A parmi Ω événements possibles

$$p : A \subset \Omega \to [\,0, 1\,] \qquad \text{tel que} \qquad p\,(A) = \frac{\#\,A}{\#\,\Omega} \tag{5.1}$$

- **Axiomes de Kolmogorov :**

  1. $0 \leqslant p\,(A) \leqslant 1 \quad \forall\ A$
  2. $p\,(\Omega) = 1$
  3. $p\,(A \cup B) = p\,(A) + p\,(B)$ si $p\,(A \cap B) = 0 \quad \forall\ A, B$

- **Condition de normalisation :**

$$\sum_{A} p\,(A) = 1 \tag{5.2}$$

- **Probabilité du complément :** non événement A

$$p\,(\bar{A}) = 1 - p\,(A) \tag{5.3}$$

- **Probabilité de l'intersection :** événements A et B

$$p\left(A \cap B\right) = p\left(A\,|B\right)p\left(B\right) = p\left(B\,|A\right)p\left(A\right) \tag{5.4}$$

- **Théorème de Bayes :** probabilité conditionnelle : A sachant B

$$p\left(A\,|B\right) = \frac{p\left(B\,|A\right)\,p\left(A\right)}{p\left(B\right)} \tag{5.5}$$

- **Valeur moyenne (espérance) :** variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle\, X\,\rangle = \sum_{A\,\subset\,\Omega} X\left(A\right)\,p\left(A\right) \tag{5.6}$$

- **Variance :** variable aléatoire X

$$\sigma^2 = \langle\,(X - \langle\, X\,\rangle)^2\rangle = \langle\, X^2\,\rangle - \langle\, X\,\rangle^2 \tag{5.7}$$

- **Ecart-type :** variable aléatoire X

$$\sigma = \sqrt{\langle\, X^2\,\rangle - \langle\, X\,\rangle^2} \tag{5.10}$$

- **Fonction de répartition de probabilité :** variable aléatoire continue X

$$p\left(X \leqslant a\right) = \int_{-\infty}^{a} f_X\left(x\right) dx \tag{5.11}$$

- **Condition de normalisation :** densité de probabilité $f_X\left(x\right)$

$$p\left(X < +\infty\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right) dx = 1 \tag{5.12}$$

- **Valeur moyenne :** variable aléatoire continue $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(x\right) f_X\left(x\right) dx \tag{5.13}$$

- **Variables aléatoires indépendantes :** $X_1, \ldots, X_n$

$$p\left(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n\right) = p\left(X_1 \leqslant x_1\right) \ldots p\left(X_n \leqslant x_n\right) \tag{5.14}$$

- **Densités de probabilité :** variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$

$$f_{X_1, \ldots, X_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = f_{X_1}\left(x_1\right) \ldots f_{X_n}\left(x_n\right) \tag{5.15}$$

- **Permutations :** n éléments discernables

$$P_n = n! \tag{5.16}$$

- **Arrangements avec répétition :** k éléments discernables parmi n

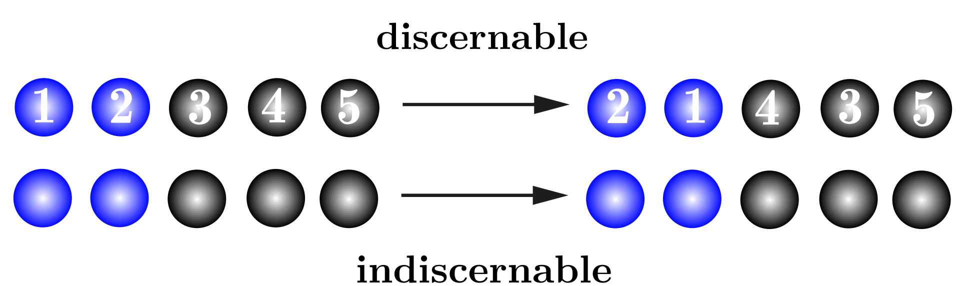
$$A_k^n = n^k \tag{5.17}$$

- **Arrangements sans répétition :** k éléments discernables parmi n

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{5.18}$$

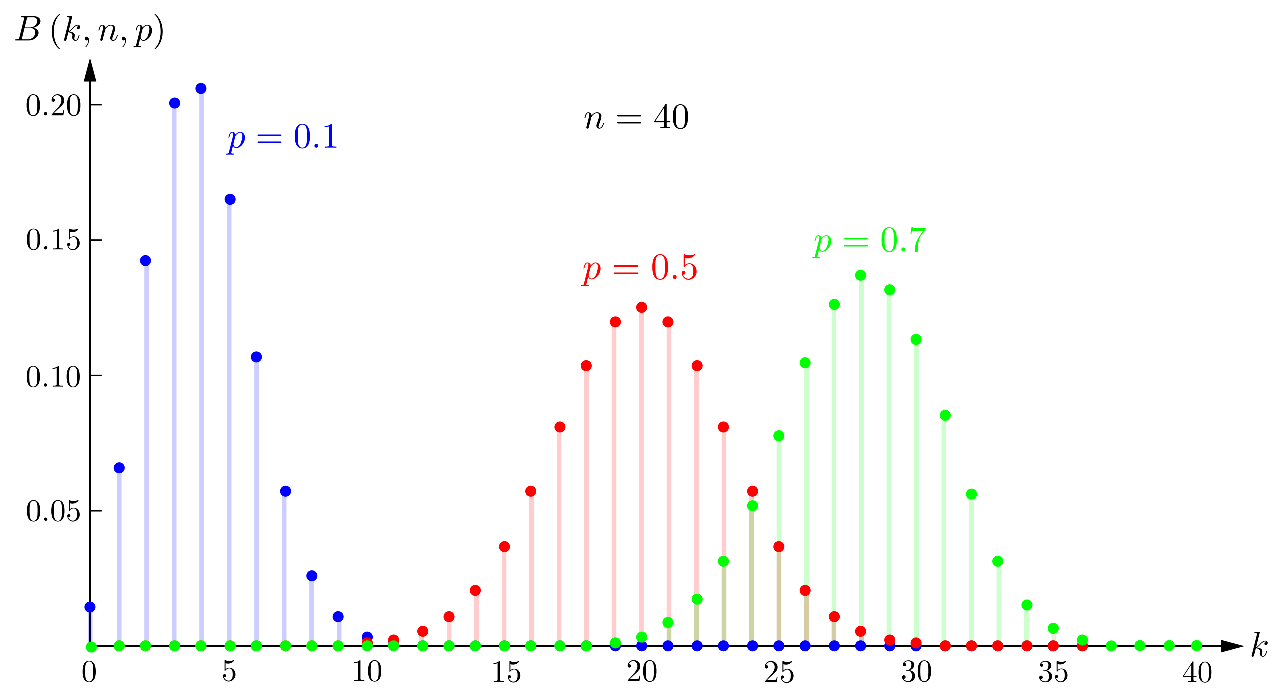
- **Combinaisons :** k éléments indiscernables parmi n

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \equiv \binom{n}{k} \tag{5.19}$$



- **Loi binomiale :** n expériences aléatoires avec k succès de probabilité p
  variable aléatoire **discrète** X nombre de succès : $\Omega \to \mathbb{N}$

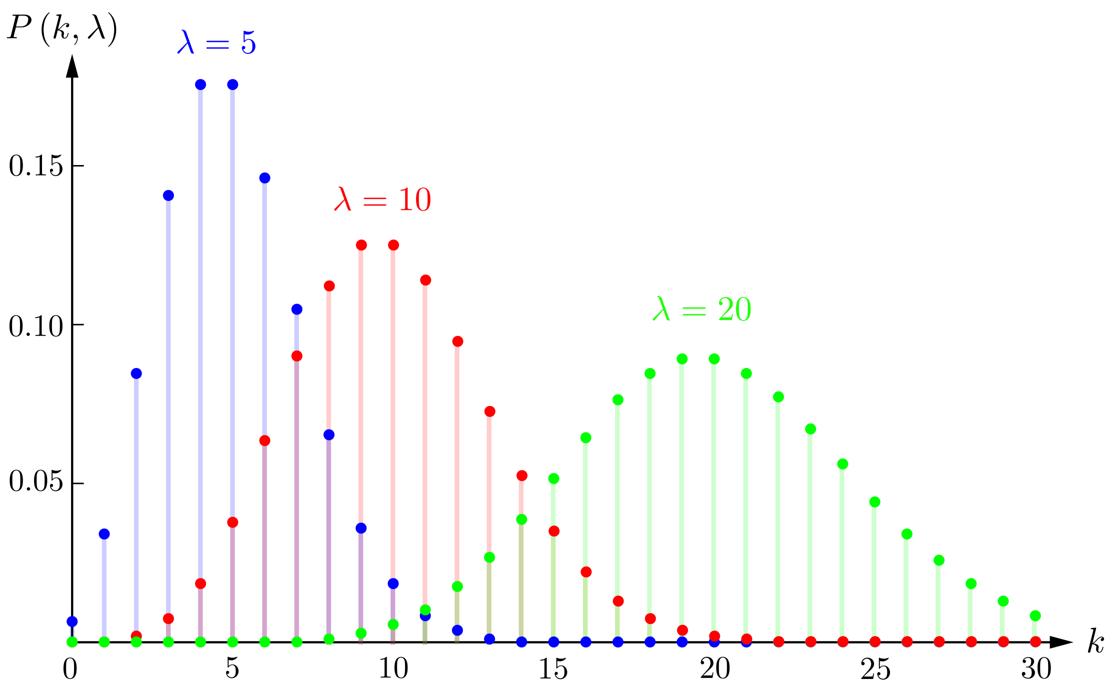
$$p\left(X = k\right) \equiv B\left(k, n, p\right) = \binom{n}{k} p^{k} \left(1 - p\right)^{n-k} \tag{5.20}$$



- **Loi de Poisson :** k événements pour une moyenne de λ événements

variable aléatoire **discrète** nb. d'évenement $X : \Omega \to \mathbb{N}$

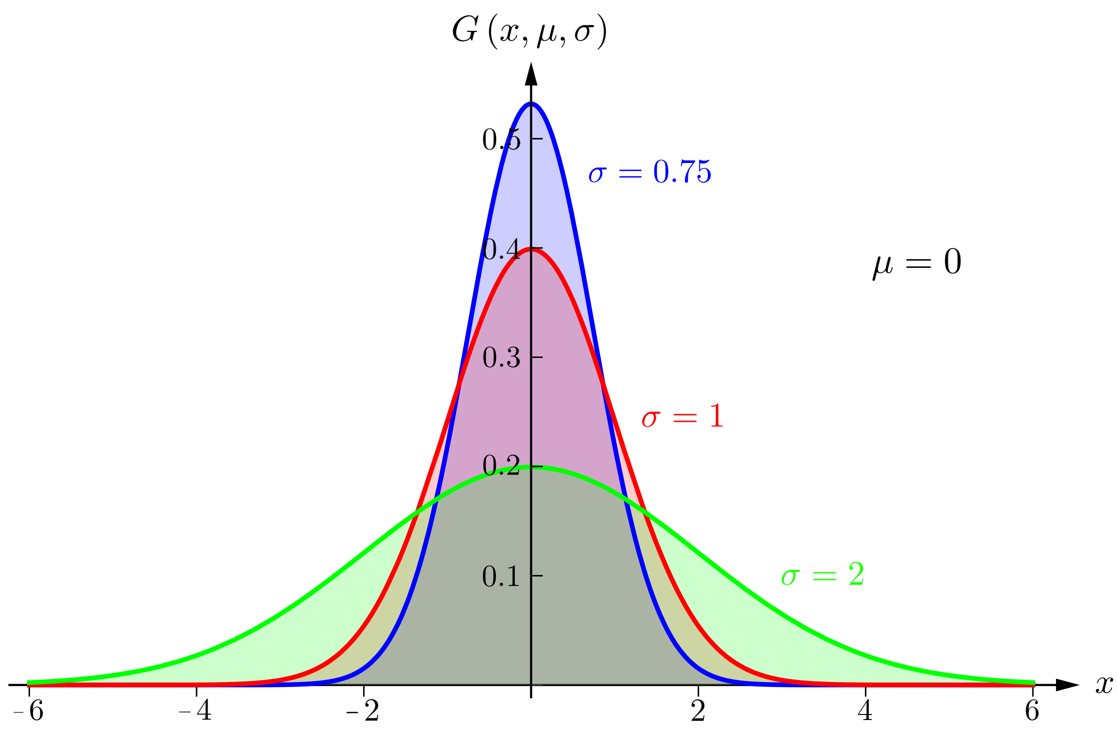
$$p\,(X = k) \equiv P\,(k, \lambda) = \frac{\lambda^{k}\, e^{-\,\lambda}}{k!} \qquad (5.22)$$



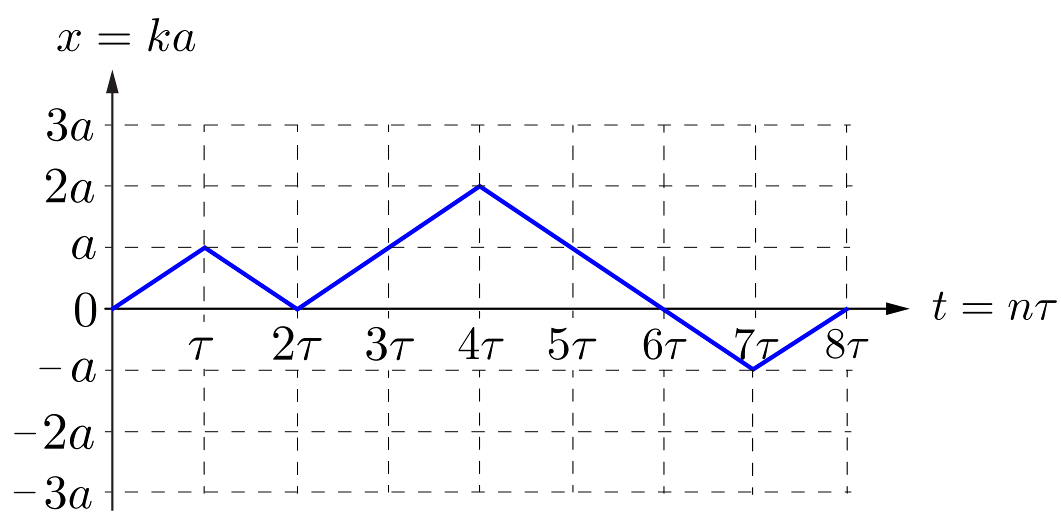
- **Loi normale :** résultat aléatoire x de moyenne μ et d'écart type σ

  variable aléatoire **continue** résultat $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f_X(x) \equiv G(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ \exp\left(-\,\frac{(x-\ \mu)^2}{2\,\sigma^2}\right) \qquad (5.24)$$



- **Marche aléatoire asymétrique (1D) :** réseau discret
  - **Arrête du réseau :** $a \in \mathbb{R}_+$
  - **Intervalle de temps :** $\tau \in \mathbb{R}_+$
  - **Temps :** $t = n\,\tau$ où $n \in \mathbb{N}$
  - **Position :** $x = k\,a$ où $k \in \mathbb{Z}$
  - \# **Déplacements à droite :** d de probabilité $p \in (0,1)$
  - \# **Déplacements à gauche :** g de probabilité $q = 1 - p$
  - \# **Etapes :** $n = d + g$ au temps t
  - \# **Sites :** $k = d - g \in \mathbb{N}$ au temps t



- **Marche aléatoire asymétrique (1D) :** réseau discret
  - \# **Déplacements à droite :** $d = \dfrac{n+k}{2}$ de probabilité p
  - \# **Déplacements à gauche :** $g = \dfrac{n-k}{2}$ de probabilité $q = 1 - p$
- **Loi binomiale :** probabilité de présence de la particule en position $x = ka$ au temps $t = n\,\tau$

$$p\,(k,n) \equiv B\,(d,n,p) = \binom{n}{d}\,p^{\,d}\,(1-\,p)^{n-\,d} \tag{5.37}$$

- **Loi binomiale :** probabilité de d déplacements de la particule vers la droite de probabilité individuelle p à l'étape n

$$B\,(d,n,p) = \frac{n!}{d!\,(n-\,d)!}\,p^{\,d}\,(1-\,p)^{n-\,d} = \frac{n!}{d!\,g!}\,p^{\,d}\,q^{\,g} \tag{5.38}$$

$$= \frac{n!}{(n-\,g)!\,g!}\,(1-\,q)^{n-\,g}\,q^{g} = B\,(g,n,q)$$

- **Loi binomiale :** représentation intégrale

$$p\,(k,n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} d\varphi\,\left(p\,e^{\,i\varphi} + q\,e^{-\,i\varphi}\right)^{n}\;e^{-\,ik\varphi} \tag{5.39}$$

- **Démonstration :** où $n + k = 2d$

$$\begin{aligned}
p\,(k,n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} d\varphi\,\left(p\,e^{\,i\varphi} + q\,e^{-\,i\varphi}\right)^{n}\;e^{-\,ik\varphi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} d\varphi\left(\sum_{d=1}^{n}\frac{n!}{d!\,(n-\,d)!}\,p^{d}\,q^{n-\,d}\,e^{-\,i(n-\,2d)\varphi}\right)\,e^{-\,ik\varphi} \\
&= \sum_{d=1}^{n}\frac{n!}{d!\,(n-\,d)!}\;p^{\,d}\,q^{n-\,d}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} d\varphi\;e^{-\,i(n+k-\,2d)\varphi} \qquad (5.40) \\
&= \sum_{d=1}^{n}\frac{n!}{d!\,(n-\,d)!}\;p^{\,d}\,q^{n-\,d}\,\delta_{n+k,2d}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} d\varphi \\
&= \binom{n}{d}\;p^{\,d}\,(1-\,p)^{n-\,d} = B\,(d,n,p) \qquad \square
\end{aligned}$$

- **Marche aléatoire symétrique (1D) :** où $p = q = \frac{1}{2}$ et n pair (5.41)

$$p\,(k,n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{\,i\varphi}+e^{-\,i\varphi}}{2}\right)^{n} e^{-\,ik\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi}\left(\cos\varphi\right)^{n} e^{-\,ik\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} e^{\,n\ln|\cos\varphi\,|}\,e^{-\,ik\varphi}\,d\varphi \qquad (5.43)$$

- **Représentation intégrale :** où $x = k\,a$ et $t = n\,\tau$ et $\varphi = \sqrt{\tau}\,\phi$

$$a = \sqrt{2D\,\tau}$$

$$p\left(\frac{x}{a},\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\,\pi}^{\pi} e^{\,\frac{t}{\tau}\ln|\cos(\varphi)\,|}\,e^{-\,i\,\frac{x}{a}\,\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi}\int_{-\,\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\,\frac{t}{\tau}\ln\left|\cos\left(\sqrt{\tau}\,\phi\right)\right|}\,e^{-\,i\,\frac{x}{a}\,\sqrt{\tau}\,\phi}\,d\phi \qquad (5.46)$$

$$= \frac{a}{2\pi\sqrt{2D}}\int_{-\,\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\,\frac{t}{\tau}\ln\left|\cos\left(\sqrt{\tau}\,\phi\right)\right|}\,e^{-\,i\,\frac{x}{\sqrt{2D}}\,\phi}\,d\phi$$

- **Densité de probabilité :** limite du continu : $a \to 0$ et $\tau \to 0$

$$f(x,t) = \lim_{\tau\to 0} \lim_{a\to 0} \frac{p\left(\frac{x}{a}, \frac{t}{\tau}\right)}{a} \tag{5.47}$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau}\ln\left|\cos\left(\sqrt{\tau}\,\phi\right)\right|} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi}\, d\phi \tag{5.48}$$

- **Développement limité :** 2^{e} ordre en $\sqrt{\tau}\,\phi$

$$\ln\left|\cos\left(\sqrt{\tau}\,\phi\right)\right| \simeq \ln\left|1 - \frac{1}{2}\tau\,\phi^2\right| \simeq -\frac{1}{2}\tau\,\phi^2 \tag{5.49}$$

- **Densité de probabilité :**

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}\phi^2} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi}\, d\phi \tag{5.50}$$

- **Intégrale :** où $A = \frac{t}{2}$ et $B = -i\frac{x}{\sqrt{2D}}$ (5.51)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2 + B\phi}\, d\phi = e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(\phi - \frac{B}{A}\right)^2}\, d\phi \tag{5.52}$$

- **Changement de variable :**

$$z = A\left(\phi - \frac{B}{A}\right)^2 \qquad \text{ainsi} \qquad dz = 2A\left(\phi - \frac{B}{A}\right) d\left(\phi - \frac{B}{A}\right)$$

$$d\left(\phi - \frac{B}{A}\right) = \frac{z^{-1/2}}{2\sqrt{A}}\, dz \tag{5.54}$$

- **Intégrale d'une gaussienne :** (5.52) et (5.54)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2 + B\phi}\, d\phi = e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(\phi - \frac{B}{A}\right)^2} d\phi$$

$$= 2\, e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{0}^{\infty} e^{-A\left(\phi - \frac{B}{A}\right)^2} d\left(\phi - \frac{B}{A}\right) \tag{5.55}$$

$$= \frac{e^{\frac{B^2}{4A}}}{\sqrt{A}} \int_{0}^{\infty} z^{-1/2}\, e^{-z}\, dz = \frac{e^{\frac{B^2}{4A}}}{\sqrt{A}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{\frac{B^2}{4A}}$$

- **Intégrale d'une gaussienne :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2+B\phi}\, d\phi = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\; e^{\frac{B^2}{4A}} \tag{5.55}$$

- **Coefficients :**

$$A = \frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad B = -\,i\,\frac{x}{\sqrt{2D}} \tag{5.51}$$

- **Intégrale d'une gaussienne :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}\,\phi^2}\, e^{-\,i\,\frac{x}{\sqrt{2D}}\,\phi}\, d\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\; e^{-\,\frac{x^2}{4Dt}} \tag{5.56}$$

- **Loi normale :** moyenne $\mu = 0$ et variance $\sigma^2 = 2Dt$

$$f\,(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\; e^{-\,\frac{x^2}{4Dt}} \tag{5.57}$$

- **Condition de normalisation :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x,t)\; dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\,\frac{x^2}{4Dt}}\, dx = 1 \tag{5.30}$$

- **Densité de probabilité initiale :** (5.56) avec $t = 0$ $\quad (5.60)$

$$f(x,0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\frac{x}{\sqrt{2D}}\,\phi}\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k'x}\,dk' = \delta(x)$$

- **Position moyenne :** intégrant (produit de fonctions impaire et paire)

$$\langle\, x(t)\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\,\frac{x^2}{4Dt}}\,dx = 0 \qquad (5.61)$$

- **Fluctuations :** variable aléatoire position (variance)

$$\sigma^2(t) = \langle\, x^2(t)\,\rangle - \langle\, x(t)\,\rangle^2 = \langle\, x^2(t)\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x,t)\,dx \qquad (5.62)$$

$$= \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{4Dt}\,e^{-\,\frac{x^2}{4Dt}}\,d\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\,e^{-\,\eta^2}\,d\eta = 2Dt$$

- **Dérivée temporelle de la densité de probabilité :** (5.57)

$$\frac{\partial f\,(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D}\,t^{1/2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}\,t^{1/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2\,t} + \frac{x^2}{4D\,t^2}\right) \tag{5.63}$$

- **Dérivée spatiale première de la densité de probabilité :** (5.57)

$$\frac{\partial f\,(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}\,t^{1/2}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right) = -\,\frac{1}{\sqrt{4\pi D}\,t^{1/2}}\,\frac{x}{2Dt}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{5.64}$$

- **Dérivée spatiale seconde de la densité de probabilité :** (5.57)

$$\frac{\partial^2 f\,(x,t)}{\partial x^2} = -\,\frac{1}{\sqrt{4\pi D}\,t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2Dt}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{x}{2Dt}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}\,t^{1/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{1}{2D\,t} + \frac{x^2}{4D^2\,t^2}\right) \tag{5.65}$$

- **Equation de la diffusion :** densité de probabilité (1D)

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \qquad (5.66)$$

- **Densité de probabilité :** marche aléatoire symétrique (1D)

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\; e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \qquad (5.57)$$

- **Densité de probabilité :** marche aléatoire symétrique (2D)

$$f(x,y,t) = f(x,t)\,f(y,t) = \frac{1}{4\pi D t}\; e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \qquad (5.68)$$

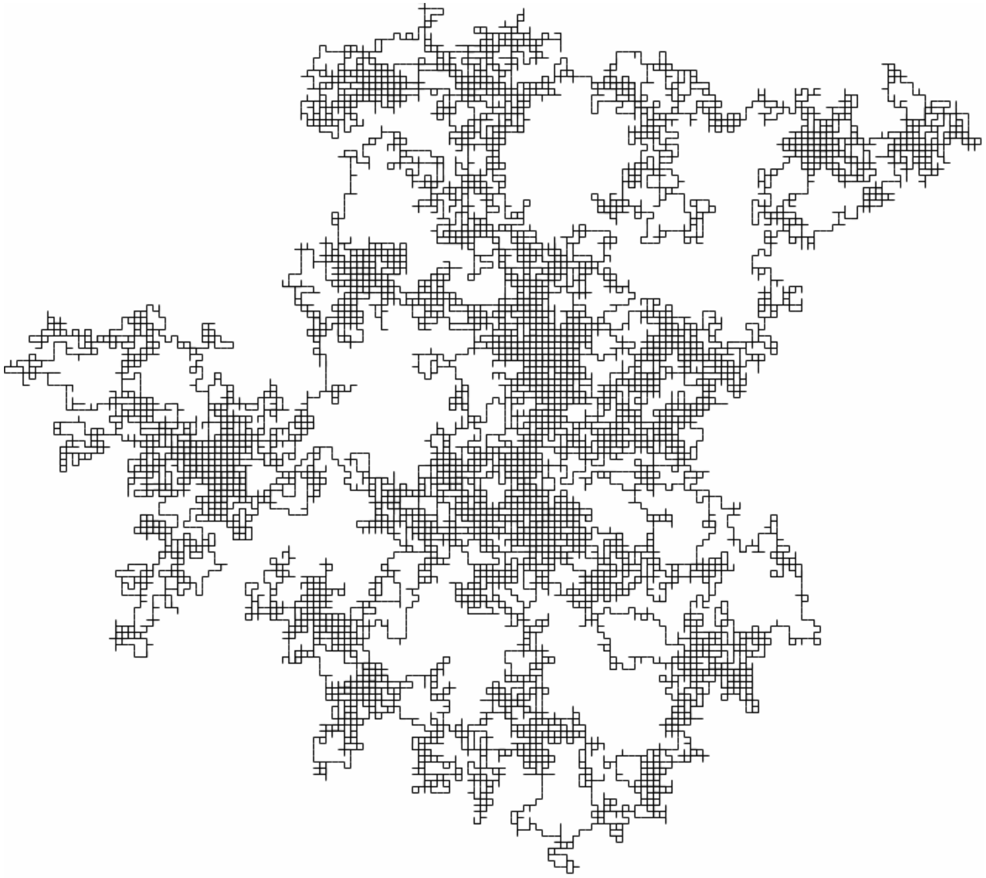
Les densités de probabilités de se déplacer selon les trois dimensions sont indépendantes et identiquement distribuées.

- **Equation de la diffusion :** densité de probabilité (2D)

$$\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial y^2}\right) \qquad (5.72)$$

- **Densité de probabilité :** marche aléatoire symétrique (2D)

$$f(x, y, t) = \frac{1}{4\pi D t}\; e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \tag{5.68}$$



- **Densité de probabilité :** marche aléatoire symétrique (3D)

$$f(x,y,z,t) = f(x,t)\, f(y,t)\, f(z,t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \qquad (5.74)$$

Les densités de probabilités de se déplacer selon les trois dimensions sont indépendantes et identiquement distribuées.

- **Equation de la diffusion :** densité de probabilité (3D) (5.78)

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right)$$

- **Densité de probabilité :** (3D) : $f(\boldsymbol{r},t) = f(x,y,z,t)$

$$f(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{3/2}}\, e^{-\frac{\boldsymbol{r}^2}{4Dt}} \qquad (5.79)$$

- **Equation de la diffusion :** densité de probabilité (3D)

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = D\, \boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{r},t) \qquad (5.81)$$